2) анализ риска (определение сценариев и причин риска для критичности компонентов системы/подсистемы, оценка рисков) в том числе:

– выявление всех возможных потенциальных опасностей (несоответствий);

– составление списка возможных последствий (S) для каждого несоответствия; каждое последствие, в соответствии с его серьезностью, оценивается по 5-балльной шкале, при этом балл 5 соответствует наиболее тяжелым последствиям;

– оценка вероятности возникновения причины несоответствия (O); каждая выявленная причина несоответствия, в соответствии с ее вероятностью возникновения, оценивается экспертами по 5-балльной шкале, при этом балл 5 соответствует наиболее часто встречающимся причинам;

– оценка вероятности обнаружения причины несоответствия (D), оценивается по 5-балльной шкале, при этом балл 5 соответствует почти никогда не обнаруживаемым причинам несоответствия;

– вычисление приоритетного числа риска (ПЧР) для каждого последствия;

– выбор несоответствий, над которыми предстоит работать;

– разработка корректирующих мер для устранения или сокращения несоответствий с высоким показателем риска.

3) документальное оформление анализа рисков;

4) переоценка степени риска с учетом проведенных CAPA (корректирующих и предупреждающих действий).

На представленной диаграмме рассмотрены основные направления, в которых могут возникнуть риски для качества при производстве лекарственных препаратов.

Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ АФФИННЫХ СВОЙСТВ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аманкос А.К., Утепкалиев С.У.

Атырауский университет имени Х. Досмухамедова, e-mail: aizok_98@mail.ru

Кривые второго порядка, или коники, традиционно считаются объектом аналитической геометрии и часто применяются инженерных исследованиях. При этом из их аффинных геометрических свойств упоминаются, в лучшем случае, только оптические. Кроме того, коники могут применяться для решения геометрических задач. В данной работе приводятся наиболее интересные факты, т.е. геометрические аффинные свойства связанные с кривыми второго порядка. Приведены ряд примеров, при решений используются аффинные свойства кривых второго порядка.

Кривые второго порядка, или коники, традиционно считаются объектом аналитической геометрии и изучаются на первых курсах технических вузов. При этом из их геометрических свойств упоминаются, в лучшем случае, только оптические. Между тем, эти кривые обладают рядом других весьма красивых свойств, большая часть которых может быть доказана методами элементарной геометрии, вполне доступными старшеклассникам. Кроме того, коники могут применяться для решения геометрических задач, на первый взгляд никак с ними не связанных. В данной работе приводятся наиболее интересные факты, связанные с кривыми второго порядка, в том числе доказанные в последнее время.

В инженерной геометрии рассматриваются сечения прямого кругового конуса и прямого кругового цилиндра, которыми являются окружность, эллипс, парабола, гипербола, а также их вырожденные виды (пара пересекающихся и пара параллельных прямых линий, одна двойная прямая, точка).

Нам известно, что если кривая выражается уравнением второй степени в какой-то аффинной системе координат, то она будет выражаться уравнением также второй степени и в любой другой аффинной системе координат в виде:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

Мы будем рассматривать аффинные свойства кривых второго порядка.

Аффинными свойствами эллипса являются:

– эллипс имеет центр симметрии – это центр эллипса;

– всякая хорда, проходящая через центр эллипса, является его *диаметром*;

– геометрическим местом середин параллельных между собой хорд является некоторый диаметр эллипса;

– геометрическим местом середин хорд, параллельных одному из диаметров служит диаметр, сопряженный данному;

– любой диаметр эллипса является его осью косой симметрии;

– у эллипса существует пара сопряженных диаметров и пара взаимно перпендикулярных диаметров (оси эллипса);

– касательные к эллипсу проходят параллельно диаметру, если точка касания принадлежит сопряженному диаметру;

– если квадрату, в который вписана окружность соответственно параллелограмм, то средняя линия и диагональ параллелограмма *являются парами сопряженных диаметров* эллипса, вписанного в этот параллелограмм;

– эллипс можно рассматривать как сечение прямого кругового цилиндра плоскостью с углом наклона к оси отличного от 0^0 и 90^0 .

Аффинные свойства гиперболы:

Гипербола общего вида может быть получена аффинным преобразованием из

равносторонней гиперболы. Таким образом, последняя является частным случаем гиперболы общего вида.

Отметим следующие аффинные свойства гиперболы:

– диаметры гиперболы – это прямые линии, проходящие через центр и не совпадающие с асимптотами;

– середины всех параллельных между собой хорд принадлежат одному диаметру;

– диаметр, делящий пополам все хорды, параллельные данной прямой, называют сопряженным с этой прямой;

– гипербола в каждой своей точке имеет единственную касательную, параллельную диаметру, сопряженному с диаметром, проведенным в точку касания;

– отрезки любой секущей, заключенной между гиперболой и ее асимптотами равны между собой.

Аффинные свойства параболы

– парабола имеет одну ось – ось симметрии;

– прямая, параллельная оси имеет две точки пересечения с параболой: одна – собственная, а другая – несобственная;

– все диаметры параболы параллельны ее оси;

– середины всех хорд лежат на одном из диаметров параболы;

– все диаметры параболы, кроме оси, являются осями косой симметрии;

– если через точку провести две касательные к параболе, то хорда, проходящая через точки касания, делится пополам диаметром, проходящим через эту точку ;

– каждая касательная параболы делит пополам отрезок другой касательной, заключенной между точкой касания и проекцией на второй точки касания первой в направлении оси параболы;

– касательная к параболе в точке делит пополам отрезок касательной, в вершине параболы, заключенной между вершины и ортогональной проекцией на;

– вершина O параболы делит пополам отрезок оси p , заключенный между точкой пересечения p с касательной в производной точке M и проекцией на ось p точки M: LO = MP = OR, так как PQ = QO.

В качестве средства исследования выберем аффинные преобразования евклидовой плоскости, которые благодаря своим инвариантам являются мощным средством для вывода новых геометрических теорем и решения задач.

Идейной линией предложенных далее задач является использование инвариантов аффинных преобразований и рассмотрение аффинно – эквивалентных фигур. Для приобщение к исследовательской деятельности прежде всего целесообразно решить следующие две задачи:

1. Доказать, что эллипс аффинно – эквивалентен окружности.

2. Выявить аффинные свойства окружности, позволяющие обосновать свойства эллипса:

a) Эллипс имеет центр симметрии.

b) Геометрическим местом середин параллельных хорд эллипса является некоторый диаметр эллипса.

c) Все диаметры эллипса разбиваются на пары сопряженных, обладающих тем свойством, что середины хорд эллипса, параллельных одному из этих диаметров, лежат на другом диаметре.

d) Касательные к эллипсу, проведенные через концы его диаметра, параллельны сопряженному диаметру.

e) Параллелограммы, построенные на парах сопряженных полудиаметров эллипса, имеют одну и ту же площадь, равную площади прямоугольника, построенного на полуосях эллипса.

k) Площадь эллипса вычисляется по формуле $S = \pi ab$, где a и b полуоси эллипса.

Аффинную эквивалентность эллипса и окружности можно доказать по определению аффинно – эквивалентных фигур. Для этого необходимо подобрать аффинное преобразование плоскости, переводящее окружность в эллипс. На момент изучения аффинных преобразований доказано, что любой эллипс может быть получен как образ некоторой окружности при преобразовании сжатия к ее диаметру. Таким образом, для решения первой задачи достаточно показать, что сжатие плоскости к прямой аффинно. Тот факт, что окружность переходит в эллипс при аффинном преобразовании, указывает на наличие каких-то общих свойств этих линий и позволяет использовать новые подходы при изучении эллипса. Это иллюстрируют свойства *а*) – *k*) второй задачи. Для их решения используются следующие инварианты: простое отношение точек прямой и коллинеарность точек (свойство *а*)), простое отношение точек прямой и сохранение параллельности прямых (свойства b) и c)), отношение площадей фигур (свойства e) и k)).

Теорема 1. (оптическое свойство эллипса). Пусть прямая l касается эллипса в точке P. Тогда прямая l – это внешняя биссектриса угла F_1PF_2 (рис. 1), где F_1, F_2 – фокусы эллипса.

Доказательство. Пусть X – произвольная точка на прямой *l*, отличная от *P*. Так как X лежит вне эллипса, имеем $XF_1 + XF_2 > PF_1 + PF_2$, т.е. из всех точек прямой *l* точка P имеет наименьшую сумму расстояний до F_1 и F_2. Но в силу вышесказанного это означает, что углы, образованные прямыми PF_1 и PF_2 с *l*, равны.

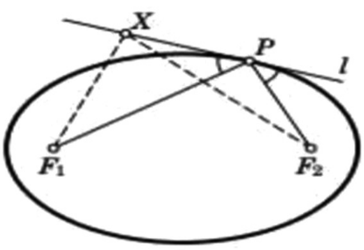

Рис. 1

Пример 1. Сформулируйте и докажите оптическое свойство для парабол и гипербол.

Решение. Для парабол оптическое свойство формулируется следующим образом. Пусть прямая *l* касается параболы в точке P. Проекцию точки P на директрису обозначим через P′. Тогда *l* является биссектрисой угла FPP′ (рис. 2), где F – фокус параболы.

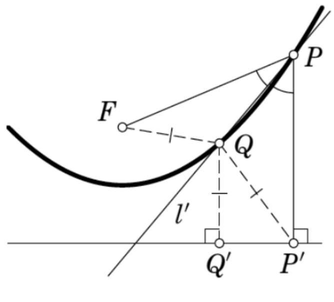

Рис. 2

Предположим, что биссектриса угла FPP′ (обозначим ее через *l*′) пересекает параболу еще в какой-нибудь точке. Обозначим эту точку через Q, а ее проекцию на директрису – через Q′. По определению параболы FQ = QQ′. С другой стороны, треугольник FPP′ равнобедренный, и биссектриса угла P – это серединный перпендикуляр к FP′. А значит, для любой точки Q, лежащей на этой биссектрисе, выполняется равенство QP′ = QF = QQ′. Но этого не может быть, так как Q′ – единственная точка на директрисе параболы, в которой достигается минимум расстояния до точки Q.

Теперь сформулируем оптическое свойство для гиперболы.

Если прямая *l* касается гиперболы в точке P, то *l* является биссектрисой угла F_1PF_2 , где F_1 и F_2 – фокусы гиперболы (рис. 3). Предположим, что биссектриса *l*′ угла F_1PF_2 пересекает гиперболу еще в какой-нибудь точке Q (лежащей на той же дуге, что и P). Для удобства будем считать, что точка P лежит на дуге, которая ближе к фокусу F_1. Обозначим через F_1' точку, симметричную F_1 относительно *l*′.

Тогда $F_1Q = QF'_1$, $F_1P = PF'_1$; кроме того, точки F_2, F'_1 и P лежат на одной прямой. Итак, $F_2P - PF_1 = F_2Q - F_1Q$. В силу вышеуказанных равенств получаем:

$$F_2F_1' = F_2P - PF_1' = F_2Q - QF'_1.$$

Но по неравенству треугольника $F_2F'_1 > F_2Q - QF'_1$.

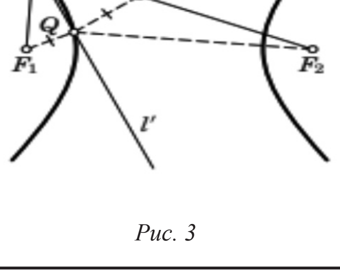

Рис. 3

Можно также получить доказательства этих утверждений, аналогичные доказательству оптического свойства для эллипса. Для этого достаточно воспользоваться результатами примера 1.

Пример 3. Рассмотрим семейство софокусных коник (так называются коники, у которых фокусы совпадают). Докажите, что любые гипербола и эллипс из этого семейства пересекаются под прямыми углами (углом между двумя кривыми называется угол между касательными к ним в данной точке их пересечения, см. рис.4.

Решение. Пусть эллипс и гипербола с фокусами F_1 и F_2 пересекаются в точке P. Тогда касательные к ним в этой точке будут биссектрисами внешнего и внутреннего углов F_1PF_2 соответственно. Следовательно, они будут перпендикулярны.

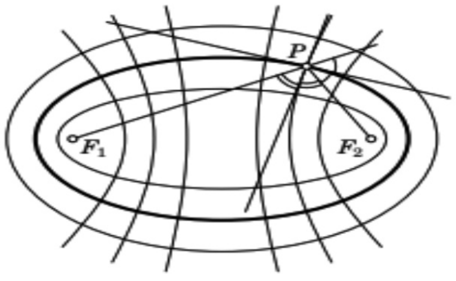

Рис. 4

Теорема 2. Геометрическим местом точек, из которых данный эллипс виден под прямым углом (*т. е. проведенные к нему из этой точки касательные перпендикулярны*), *является окружность с центром в центре эллипса (рис. 5).*

Доказательство. F_1 и F_2 – фокусы эллипса. Пусть касательные к эллипсу в точках X и Y пересекаются в точке P. Отразим F_1 относительно PX. Полученную точку обозначим через F'_1. Тогда $\angle XPY = \angle F'_1PF_2$ и $F'_1F_2 = F_1X + F_2X$, т.е. длина отрезка F'_1F_2 равна большой оси эллипса (длине веревки, к которой привязана коза). Угол F'_1PF_2 прямой тогда и только тогда, когда $F'_1P_2 + F_2P_2 = F'_1F_2$ (по теореме Пифагора). Следовательно, угол XPY прямой тогда и только тогда, когда сумма $F_1P_2 + F_2P_2$ равна квадрату большой оси эллипса. Но, как легко показать, это условие определяет окружность. Действительно, пусть точка F_1 имеет декартовы координаты $(x_1; y_1)$, а F_2 соответственно $(x_2; y_2)$. Тогда координаты искомых точек P будут удовлетворять условию $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = C$, где C – это квадрат большой оси. Но поскольку коэффициенты при x_2 и y_2 равны (а именно 2) и коэффициент при xy равен 0, множеством точек, удовлетворяющих этому уравнению, будет окружность. Легко понять из соображений симметрии, что центром этой окружности будет середина отрезка F_1F_2.

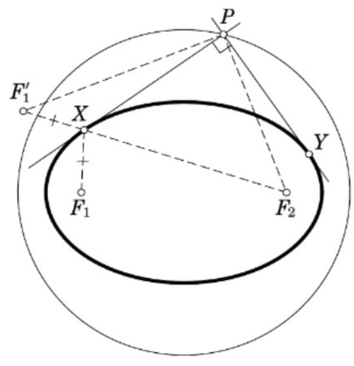

Рис. 5

Для гиперболы такая окружность существует, вообще говоря, не всегда. Когда угол между асимптотами гиперболы острый, радиус окружности будет мнимым. Если асимптоты перпендикулярны, то окружность вырождается в точку – центр гиперболы.

Примечание. Пусть даны точки $P_1, P_2, ..., P_n$ и числа $k_1, k_2, ..., k_n$ и C. Геометрическим местом точек X, удовлетворяющих уравнению $k_1 \cdot XP_1^2 + k_2 \cdot XP_2^2 + \ldots + k_n \cdot XP_n^2 = C$, будет окружность. Эта окружность называется окружностью Ферма-Аполлония.

Теорема 3. Пусть на эллипс ω накинули нить, которую натянули с помощью карандаша. Тогда карандаш при вращении вокруг эллипса ω опишет другой эллипс, софокусный с данным эллипсом (рис. 6).

Доказательство. Очевидно, что получившаяся фигура (обозначим ее через ω_1) будет иметь гладкую границу. Покажем, что в каждой точке X на фигуре ω_1 касательная будет совпадать с биссектрисой внешнего угла F_1XF_2. Пусть XM и XN – касательные к эллипсу ω. Тогда $\angle F_1XN = \angle F_2XM$, а значит, биссектриса внешнего угла NXM будет совпадать с биссектрисой внешнего угла F_1XF_2. Обозначим ее через l.

Пусть Y – произвольная точка на прямой l, YL и YR – касательные к ω, причем они проведены с тех же сторон, как показано на рис 4. В дальнейших рассуждениях будет использоваться, что точка Y лежит «слева» от X, другой случай рассматривается аналогично. Обозначим через P точку пересечения прямых XM и YL. Легко понять, что YN < YR + RN, а LM < LP + PM. Кроме того, поскольку l – внешняя биссектриса угла NXP, имеем PX + XN < PY + YN. А значит,

$$MX + XN + \overset{\smile}{NM} < MX + XN + \overset{\smile}{NL} +$$

$$+ LP + PM = PX + XN + \overset{\smile}{NL} + LP < PY +$$

$$+ YN + \overset{\smile}{NL} + LP = LY + YN + \overset{\smile}{NL} < LY +$$

$$+ YR + \overset{\smile}{RN} + \overset{\smile}{NL} = LY + YR + \overset{\smile}{RL}.$$

(здесь под дугами $\overset{\smile}{NL}$ подразумеваются дуги, по которым идет нить). Следовательно, точка Y будет вне фигуры ω_1. То же верно для любой точки Y на прямой l. Получается, что ω_1 содержит единственную точку прямой l, т.е. касается этой прямой. Из доказанного также сразу следует, что полученная кривая выпукла.

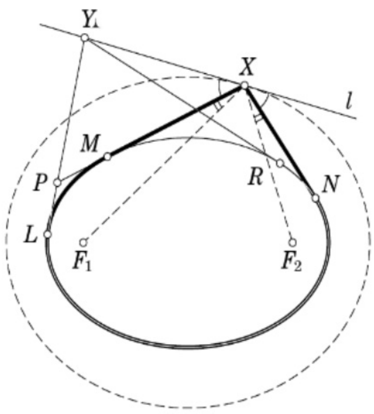

Рис. 6

Итак, сумма расстояний до фокусов F_1 и F_2 в любой момент времени не меняется. Из этого можно сделать вывод, что она постоянна, а значит, траектория карандаша совпадает с эллипсом.

Строго это можно доказать так. Пусть точка X лежит вне эллипса. Поставим карандаш в точку X и натянем нить вокруг него и эллипса. Пусть f(X) – длина такой нити, а $g(X) = F_1X + F_2X$ (точку мы понимаем как пару ее координат; таким образом, и функции f и g зависят от пары действительных чисел). Можно показать, что эти функции непрерывно дифференцируемы, причем векторы grad(f) = $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ и grad(g) = $\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)$ отличны от нуля во всех точках. Тогда по теореме о неявной функции кривая, описываемая карандашом при фиксированной длине нити (т. е. линия уровня функции f), гладкая (непрерывно дифференцируемая). Отсюда следует, что кривую можно параметризовать дифференцируемой функцией R = R(t) (это опять же пара координатных функций x = x(t), y = y(t)), вектор $\frac{dR}{dt} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}\right)$ производной которой отличен от нуля. Выше фактически доказано, что касательный к кривой вектор касается линии уровня функции g, т.е. ортогонален вектору gradg(R) в точке R = R(t). Рассмотрим функцию g(R(t)). Ее производная равна:

$$\frac{dg(R(t))}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x(t)}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 0.$$

(это запись упомянутой выше ортогональности), т.е. функция g(R(t)) – константа. Это и означает, что наша кривая лежит на эллипсе с теми же фокусами. Поскольку на любом луче, исходящем из F_1, должна лежать точка нашей кривой, она совпадает с эллипсом.

Теорема 4. Множество точек, из которых парабола видна под углом φ *или* 180^0 – φ, *есть гипербола с фокусом в точке* F и *директрисой* l (рис. 7).

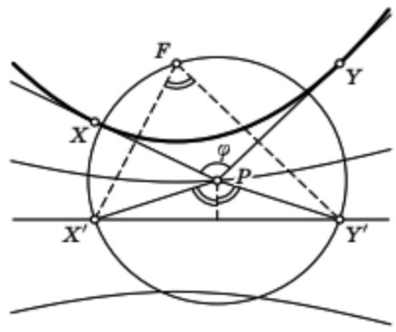

Рис. 7

Доказательство. Действительно, пусть касательные PX и PY, проведенные к параболе из точки P, образуют угол φ. Рассмотрим случай, когда φ > 90°. Проекции точек X и Y на директрису параболы обозначим через X′ и Y′.

Понятно, что ∠X′FY′ = 180^0 – φ.

Точка P является центром описанной окружности треугольника FX′Y′. А значит, ∠X′PY′ = 360^0 – 2φ. Поэтому расстояние от P до директрисы равно PF·|cos(180^0 – φ)| = PF·|cosφ| и P лежит на гиперболе, фокус и директриса которой совпадают с фокусом и директрисой параболы, а эксцентриситет равен |cosφ| (т.е. угол между асимптотами равен 2φ). То же справедливо, если угол между касательными равен 180^0 – φ. При этом если парабола лежит внутри острого угла между касательными, то P находится на «дальней» от F ветви гиперболы, а если внутри тупого, то на «ближней».

Список литературы

1. Яглом И.М. Геометрические преобразования, Т. 1, 2. М.: Гостехиздат, 1955–1956.
2. Заславский А.А. Геометрические преобразования. М.: МЦНМО, 2003.
3. Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.
4. Яглом И.М., Ашкинузе В.Г. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии. М. 1962.

ОТНОСИТЕЛЬНОЙ И АБСОЛЮТНОЙ ОДНОВРЕМЕННОСТИ СОБЫТИЙ

Торегалиева А., Утепкалиев С.

Атырауский государственный университет имени Х. Досмухамедова, e-mail: Serik.Utepkaliyev@mail.ru

В статье рассматривается диалектическое представление о понятие пространства в материалистическом мире, т.е. естественное представление о пространстве и времени.